

Vliv změny koeficientu pružnosti na poměry v trubce malého průřezu

Ing. Blanka Demčáková, Ing. Marcel Filip

VŠB – TU Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Katedra měřicí a řídicí techniky

V článku je uveden matematický popis modelu pružné trubky. Model je realizován v MATLABu 5.3 řešením soustavy parciálních diferenciálních rovnic: 1. rovnice rovnováhy sil, 2. rovnice kontinuity a 3. energetické rovnice. Vytvořený model slouží jako příprava k modelování cév v lidském organismu. Do modelu lze dosadit konstanty a vztahy pro výpočet libovolného typu trubky. Je zde prezentován dílčí výsledek modelu charakterizující vliv změny koeficientu pružnosti na tlakové a průtokové poměry v trubce malého průřezu.

Klíčová slova: modelování pružné trubky, matematický popis modelu, koeficient pružnosti.

1. Úvod

V článku je prezentován model pružného potrubí malého průřezu. Tato práce je přípravou pro modelování cév v lidském organismu. V prvním přiblížení můžeme chápat cévu jako velmi pružnou trubku s velmi malým průřezem.

Zabýváme se zde sledováním změn poměrů v trubce v závislosti na změně jejího koeficientu pružnosti. Vycházeli jsme z již vytvořeného modelu pružného potrubí, který už byl ověřen měřeními na potrubním systému a dával velmi dobré výsledky.

Model pružné trubky představuje systém s rozloženými parametry. Je popsán soustavou tří nelineárních parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu a vztahy zahrnujícími pružnost kapaliny a materiálu trubky. Je zde zdokumentován výsledek modelu charakterizující vliv změny koeficientu pružnosti na tlakové a průtokové poměry v trubce malého průřezu.

2. Matematický popis modelu

Matematický model je softwarově zpracován v prostředí MATLAB 5.3/ WINDOWS. Základem modelu je rovnice rovnováhy sil (1), rovnice kontinuity (2) a energetická rovnice (3). Dále je model popsán vztahy pro tlakovou a teplotní změnu hustoty kapaliny a průřezu trubky (4, 5).

1. Rovnice rovnováhy sil viz. [1], [2]

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho g \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\lambda \rho v |v|}{2 dn} = 0 \quad (1)$$

2. Rovnice kontinuity viz. [1], [2]

$$\begin{aligned} & v\rho \left(\frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial x} \right) + F\rho \frac{\partial v}{\partial x} + Fv \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \\ & + \rho \left(\frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) + F \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

3. Energetická rovnice viz. [3]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(cT + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \left(cT + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} (pv) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho vgz) - \frac{\gamma(TG - T)}{F} = 0 \quad (3)$$

4. Rovnice pro tlakovou a teplotní změnu hustoty kapaliny a průřezu trubky viz. [2]

$$\rho = \frac{\rho_0}{\exp\left(\frac{1}{K}(p_0 - p)\right)\exp(\beta(T - T_0))} \quad (4)$$

$$F = F_0 \exp\left(\frac{dn}{Ed}(p - p_0)\right)\exp(2\alpha(T - T_0)) \quad (5)$$

kde

$c.T$	[J kg ⁻¹]	 vnitřní energie tekutiny
d	[m]	 tloušťka stěny potrubí
dn	[m]	 vnitřní průměr potrubí
E	[Pa]	 modul pružnosti materiálu trubky
F	[m ²]	 průřez potrubí
g	[m s ⁻²]	 gravitační zrychlení
K	[Pa]	 modul objemové pružnosti kapaliny
l	[m]	 délka potrubí
p	[Pa]	 tlak kapaliny
t	[s]	 čas
TG	[K]	 okolní teplota
v	[m s ⁻¹]	 průtoková rychlost
x	[m]	 souřadnice po potrubní ose
z	[m]	 nadmořská výška
α	[K ⁻¹]	 součinitel objemové roztažnosti potrubí
β	[K ⁻¹]	 součinitel objemové roztažnosti kapaliny
γ	[W m ⁻¹ K ⁻¹]	 koeficient přestupu tepla
λ	[-]	 koeficient tření
ρ	[kg m ⁻³]	 hustota kapaliny

Rovnice (1), (2), (3) a vztahy (4), (5) popisují model pružné trubky, která je základní částí pro potrubní systémy, složené z několika trubek. Pro komplikovanější potrubní systémy je nutné model doplnit o vztahy popisující veličiny v uzlech systému. Tyto vztahy jsou uvedeny v [4].

Základem modelu je vyřešení prvních tří rovnic. Tyto parciální diferenciální rovnice jsou řešeny numericky metodou řezů v uzlech po ose délky a integrací Runge-Kutta čtvrtého řádu po ose času. Tyto metody uvádí např. [5], [6].

Ostatní prvky systému např. tlakové zdroje, odběry aj. jsou do simulačního programu (modelu) zahrnuty jako okrajové podmínky.

Při řešení se bere v úvahu závislost změny hustoty kapaliny na jejím tlaku a teplotě, tepelná i tlaková roztažnost potrubí (pružnost potrubí).

Výhodou modelu je, že do něj lze dosadit konstanty pro výpočet libovolného typu potrubí i celé sítě, a tyto parametry během výpočtu modifikovat. To umožňuje sledovat změnu veličin v trubce při změnách koeficientu pružnosti E .

Výstupem z modelu jsou následující veličiny:

$$\begin{aligned} v &= f(x,t) \\ p &= f(x,t) \\ T &= f(x,t) \\ \rho &= f(x,t) \\ dn &= f(x,t) \end{aligned}$$

3. Modelovaná úloha

Cílem modelované úlohy je zjistit vliv změny koeficientu pružnosti E v určité oblasti elastické trubky na ustálené veličiny. Modelovaným systémem je pružná trubka 5m dlouhá, kterou je dopravována voda. Základní parametry modelu potrubí a kapaliny jsou uvedeny v *tab.1*.

Název veličiny	Označení	Hodnota	Jednotka
Délka potrubí	L	5	[m]
Průměr trubky	dn	16	[mm]
Tloušťka stěny trubky	d	1	[mm]
Modul pružnosti materiálu trubky	E	$0,5 \cdot 10^5$	[Pa]
Součinitel objemové roztažnosti trubky	α	$1,2 \cdot 10^{-5}$	[K ⁻¹]
Koeficient tření	λ	0,5	[-]
Hustota kapaliny	ρ	1000	[kg.m ⁻³]
Součinitel objemové roztažnosti kapaliny	β	$0,18 \cdot 10^{-3}$	[K ⁻¹]
Modul objemové pružnosti kapaliny	K	$2 \cdot 10^9$	[Pa]
Koeficient přestupu tepla	γ	10	[W.m ⁻¹ .K ⁻¹]
Měrné teplo	C	4181	[J.kg ⁻¹ .K ⁻¹]
Teplota okolí	TG	309	[K]

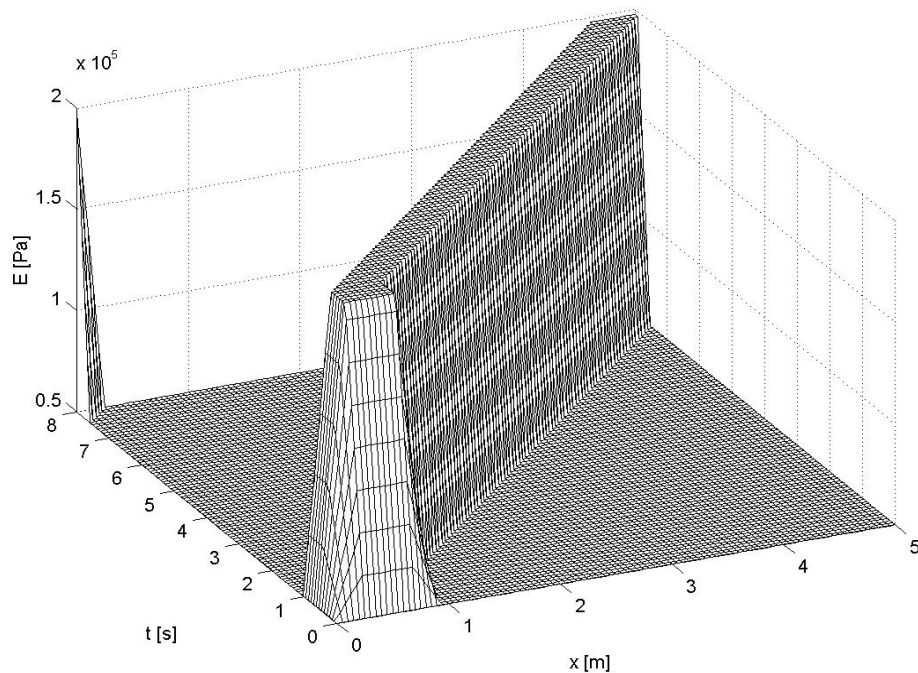
Tab.1. Parametry modelu

Postup řešení spočívá ve dvou krocích:

1. Vypočítat ustálený stav v pružné trubce o konstantním modulu pružnosti E .
2. V určité oblasti trubky měnit modul pružnosti E , podle předem stanovených požadavků a sledovat změny ustálených veličin.

Ustálený stav představuje ve výsledcích modelu *obr.2 - obr.5* čas $t=0$.

V čase $t>0s$ se začne měnit modul pružnosti trubky E dle *obr.1*. Modul pružnosti na začátku trubky se zvyšuje lineárně po dobu 1 sekundy. Pak se tato změna začne šířit od začátku trubky na její konec. Trvání jednoho cyklu, tzn. doba, za kterou se projde změna modulu pružnosti celou trubicí, je 8s.

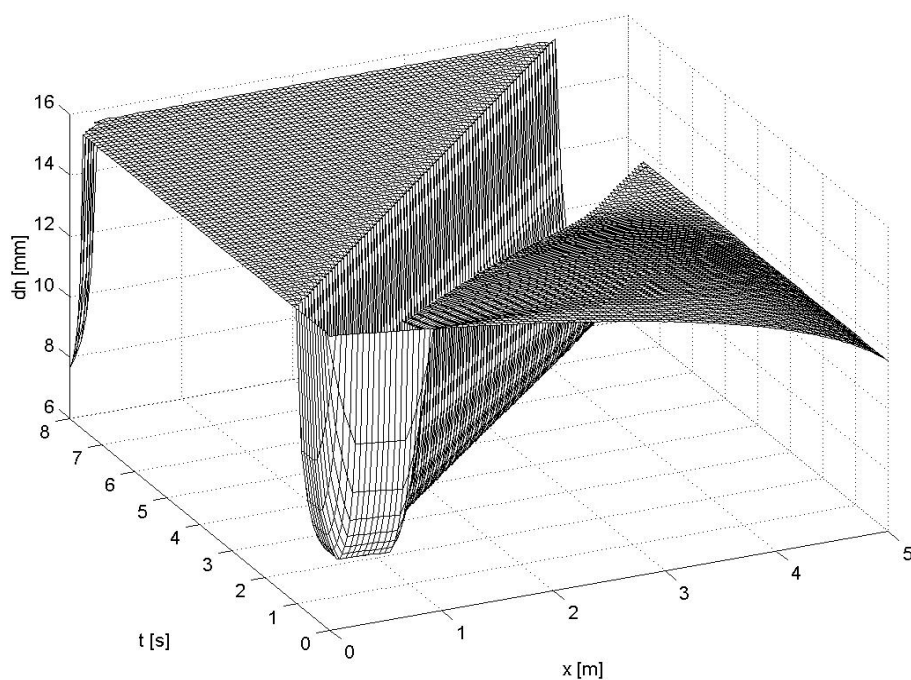


obr.1 Změna modulu pružnosti E

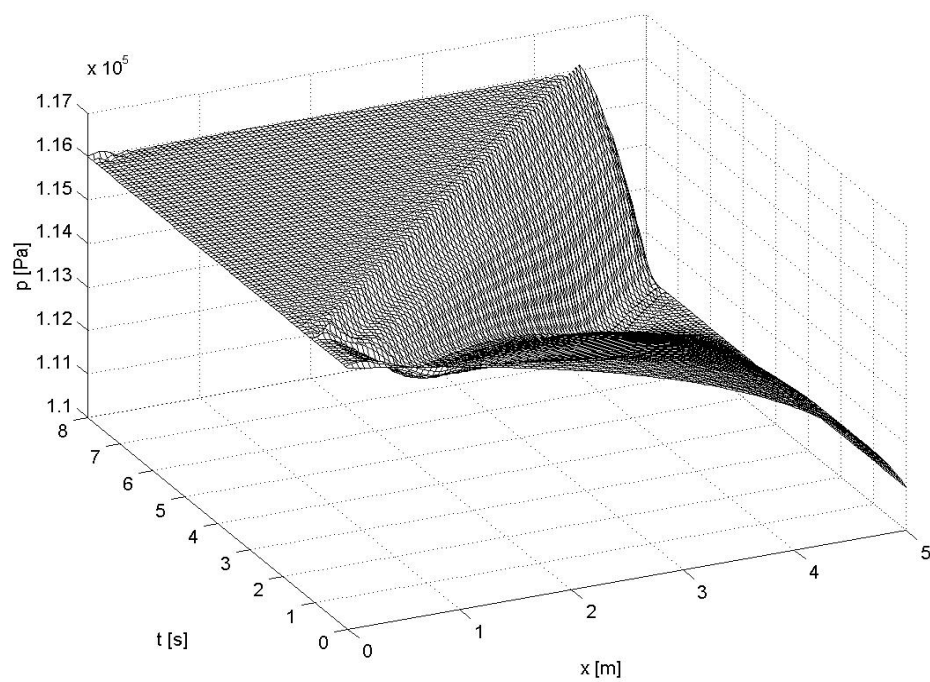
Na *obr.1* je na počátku trubky v čase $t=8s$ vidět začátek druhého cyklu šíření, nejedná se o chybu, ale jde o záměr.

Výsledky modelu ukazují *obr.2*, *obr.3*, *obr.4*, *obr.5*.

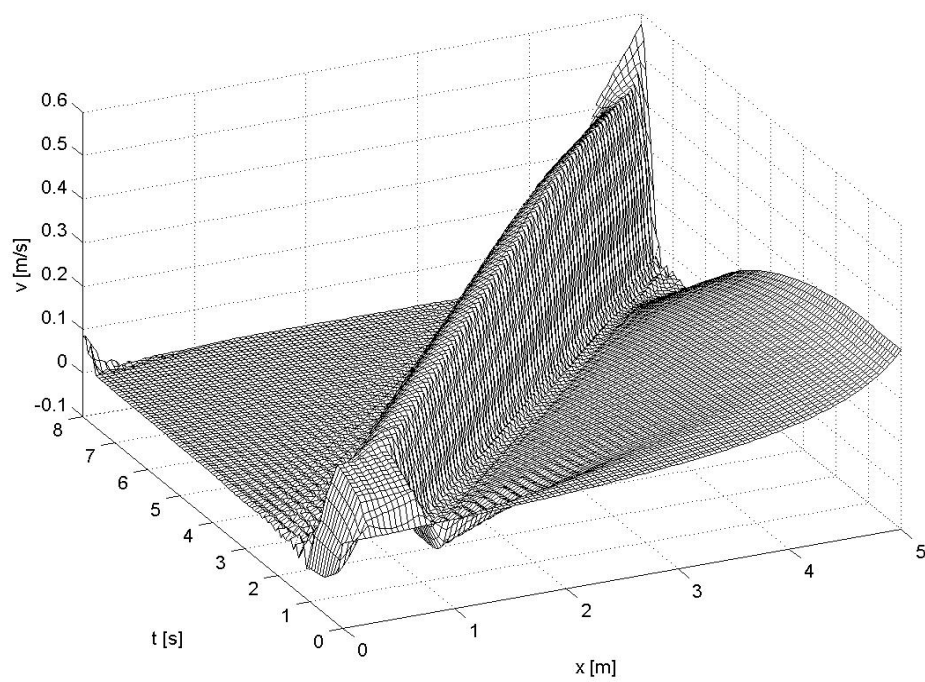
Je důležité si uvědomit, že zvyšováním modulu pružnosti se trubka stává méně pružnou, a to má za následek pokles jejího průměru viz *obr.2*.



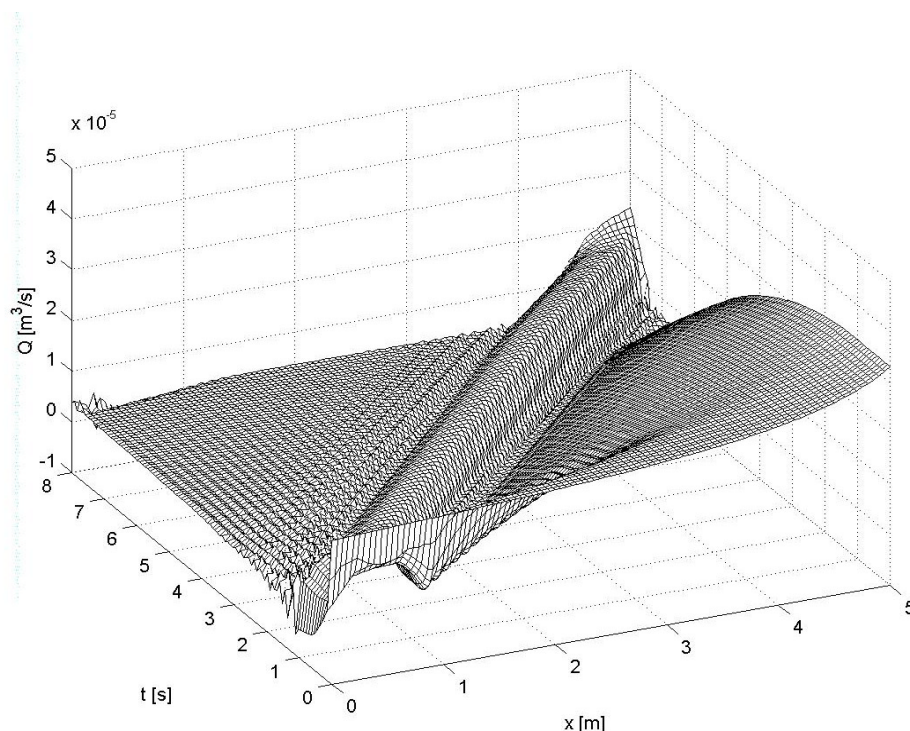
obr.2 Průměr trubky dn



obr.3 Tlak v trubce p



obr.4 Rychlost proudění v



obr.5 Průtok Q

4. Závěr

Z výsledků modelu *obr.2*, *obr.3*, *obr.4*, *obr.5* je vidět, že změna koeficientu pružnosti trubky způsobí značnou změnu chování ustálených veličin.

Vlivem zvyšování koeficientu pružnosti trubky v dané oblasti, se trubka stává méně pružnou a dochází zde ke zmenšení jejího průměru. V zúžené části dojde k zvětšení tlakové ztráty a k nárůstu rychlosti proudění. Průtok trubkou klesá, neboť zúžené místo je překážkou proudící hmotě.

Model slouží jako příprava k modelování cév v lidském organismu. Pružnost cévy je podstatnou vlastností cévního systému a nelze ji zanedbat, na rozdíl od potrubního systému na dopravu vody, kde pružnost potrubí v některých případech zanedbat můžeme.

V současné době je model doplňován dalšími parametry a vztahy, které lépe charakterizují chování cévy.

Práce vznikla s podporou GAČR, projekt č. 102/98/1259 – Modelování a optimální řízení polytropních sítí přenosu tekuté hmoty.

Literatura

- [1] Mašovský, O.: Hydromechanika pro strojní inženýry. Praha, SNTL 1956.
- [2] Nevřiva, P. a kol.: Soubor zpráv o dynamice a regulaci přenosu tekutého média v potrubní síti. Ostrava, VŠB-TU 1996-1998.
- [3] Kozubková, M. a kol.: Matematické modely nestlačitelného a stlačitelného proudění. Ostrava, VŠB-TU 1997.
- [4] Demčáková B., Filip M.: Ověření modelu dynamiky média v potrubí. Automatizace č.3, roč. 43, březen 2000, str. 192-194.

- [5] Slaviček, O. kol.: Základní numerické metody. Praha, SNTL 1964.
- [6] Rektorys, K.: Přehled užití matematiky I, II. Praha 1995.

Kontakt:

VŠB – TU Ostrava

17. listopadu 15

708 33 Ostrava - Poruba

E-mail: blanka.demcakova@vsb.cz, marcel.filip@vsb.cz