VYUŽITÍ MATLABU V OPTICKÉ DIAGNOSTICE PROUDÍCÍHO PLYNU

J. Blažek, P. Kříž, V. Stach

Pedagogická fakulta JU v Českých Budějovicích, Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice

1) Matematická formulace problému zpracování interferogramů

Ke zviditelnění nehomogenit v plynu či ve slabě ionizovaném plazmatu lze využít některou z metod vizualizace transparentních prostředí [1]. Metodou vhodnou i pro kvantitativní analýzu je holografická interferometrie [2], jež je založená na interferenci dvou koherentních elektromagnetických vln: vlny procházející studovaným objektem a referenční vlny rekonstruované z hologramu, která odpovídá původnímu, téměř homogennímu stavu.

K vytváření interferogramů využíváme interferometr Machova-Zehnderova typu [3]. Ten může být seřízen ve dvou modifikacích. Seřízení na nekonečnou šířku proužku se vyznačuje rovnoběžností objektového a referenčního svazku. Při druhé modifikaci, tzv. seřízení na konečnou šířku proužku, je referenční svazek zrcadlem odkloněn o malý úhel, což vede k vytvoření charakteristické soustavy rovnoběžných proužků, jež jsou díky nehomogenitám prostředí deformovány.

Předpokládejme, že osa x je orientována ve směru paprsku procházejícího zkoumaným prostředím a rovina proměnných (y,z) je rovnoběžná s interferogramem. Vzniklá interferenční struktura se pak popisuje rovnicí

$$g(y,z) = a(y,z) + b(y,z) \cdot \cos\varphi(y,z), \qquad (1)$$

v níž g je intenzita osvětlení interferogramu v daném místě o souřadnicích (y,z). V ideálním případě jsou veličiny a, b konstantní, ve skutečnosti však vykazují fluktuace, způsobené nedokonale homogenním osvětlením při expozici hologramu. Nositelem informace o vnitřních poměrech v plynu je fázové posunutí φ mezi referenčním a objektovým paprskem. To lze rozdělit na část lineární φ_{lin}, způsobenou odklonem referenčního svazku, a část φ_{gas}, způsobenou nehomogenitami prostředí. Předpokládáme-li odklon referenční vlny v rovině (y,z), pak lineární část fázového posunutí je (až na fyzikálně nevýznamnou konstantu)

$$\varphi_{\mathrm{lin}} = 2\pi f_0 z, \qquad (2)$$

kde prostorová frekvence f_0 je určena úhlem odklonu referenčního svazku. Fázové posunutí prostředí je dáno integrální formulí

$$\varphi_{\mathrm{gas}}(y,z) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \int_{x1}^{x2} [n(x,y,z) - n_0]\, \mathrm{d}x. \qquad (3)$$

Zde λ je vlnová délka použitého světla, n je index lomu vyšetřovaného prostředí, n_0 je index lomu původního homogenního stavu při kterém byl exponován hologram, a x_1, x_2 jsou x-ové souřadnice vstupu paprsku do objektu a výstupu z něj.

Index lomu plynu závisí na jeho hustotě. Konkrétně pro zředěný plyn s indexem lomu blízkým jedničce lze použít Gladstonovy –Daleovy aproximativní formule [1]

$$n = 1 + (n_0 - 1) \cdot \frac{\rho}{\rho_0}, \tag{4}$$

kde ρ a ρ_0 jsou hustoty vyšetřovaného a původního prostředí.

Při určování vnitřních poměrů v proudícím plynu jsme tak postaveni před dvě nezávislé úlohy: a) stanovení fáze φ_{gas} z funkcionální rovnice (1); b) pro danou fázi φ_{gas} určení indexu lomu n, resp. veličin s ním souvisejících (hustota, teplota, tlak) z integrální rovnice (3). První část řešíme pomocí Takedovy metody Fourierovy transformace, druhou část pro radiálně symetrický případ pomocí Abelovy transformace. Obě metody jsou stručně popsány v následující kapitole.

2) Teoretické řešení problému

Takedova metoda [4] vychází z diskrétní Fourierovy transformace intenzity interferogramu, brané podél úsečky kolmé na interferenční proužky.Připomeňme si proto nejdříve definici této transformace, jak ji najdeme např. v nápovědě k funkci `fft` Matlabu. Nechť na intervalu $(0, L)$ je definována funkce $g(z)$ proměnné z a nechť je dáno N jejích hodnot $g_{\text{j}} \equiv g(z_{\text{j}})$ na rovnoměrně rozložených uzlech $z_{\text{j}} = \text{j} \cdot L/N$, $\text{j} = 0,1,\ldots,N-1$. Diskrétní Fourierova transformace $\text{FT}[g] \equiv G$ je definována řadou

$$G(f_{\text{k}}) = \sum_{j=0}^{N-1} g(z_{\text{j}}) \cdot \exp(-\text{i}\,2\pi\, f_{\text{k}}\, z_{\text{j}}), \quad \text{k} = 0,1,\ldots,N-1, \tag{5}$$

v níž jsme zavedli frekvenční proměnnou $f_{\text{k}} = \text{k} \cdot 1/L$. Inverzní Fourierova transformace $\text{IFT}[G] = g$ je pak

$$g(z_{\text{j}}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(f_{\text{k}}) \cdot \exp(\text{i}\,2\pi\, f_{\text{k}}\, z_{\text{j}}), \quad \text{j} = 0,1,\ldots,N-1. \tag{6}$$

Přímo z definice Flourierovy transformace vyplývají vlastnosti

$$\begin{aligned} &\text{FT}[g]^*(f) = \text{FT}[g^*](-f), \\ &\text{FT}[g \cdot \exp(\text{i}\,2\pi\, f_0\, z)](f) = \text{FT}[g](f - f_0). \end{aligned} \tag{7}$$

Hvězdičkou je zde označena operace komplexního sdružení; f_0 je libovolná konstanta, f je frekvenční proměnná.

Jelikož $G_{\text{k}\pm\text{N}} = G_{\text{k}}$, lze od pouze nezáporných indexů a frekvencí přejít k indexům a frekvencím symetricky rozloženým kolem počátku. Např. pro N liché, $N = 2M+1$, lze od indexů $\text{k} = 0,1,\ldots,N-1$ přejít k indexům $\text{k} = -M,\ldots,M$. Fourierova transformace s frekvencemi symetricky rozloženými kolem nuly vykazuje příznivější interpolační vlastnosti. V Matlabu tento přechod zajišťuje standardní funkce `fftshift`.

Inverzní Fourierova transformace vrací funkci g periodickou, $g_{\text{j}} = g_{\text{j+N}}$. Skutečnost, že původní funkce g obvykle podmínku periodičnosti $g(0) = g(L)$ nesplňuje, vede k nepřesné aproximaci funkce g funkcí $\text{IFT}[G]$ v okolí krajních bodů. Tento nežádoucí okrajový efekt lze částečně potlačit volbou vhodné funkce H („hanning window“), kterou je funkce g nejdříve vynásobena, přičemž výsledná funkce $H\,g$ již podmínku periodičnosti splňuje. Obvykle se tato funkce bere ve tvaru

$$H(z) = 1 - \cos\frac{2\pi z}{L} \tag{8}$$

s nulovými krajními hodnotami.

Takedova metoda určení fázového rozdílu vychází z Fourierovy transformace profilu intenzity, vzatého podél úsečky interferogramu, v našem případě orientované ve směru osy z. Pro tento účel přepíšeme funkci g nejdříve do tvaru (proměnnou $y \equiv \text{konst.}$ explicitně nevypisujeme)

$$g(z) = a(z) + c(z)\cdot\exp(\mathrm{i}\ 2\pi f_0 z) + c^*(z)\cdot\exp(-\mathrm{i}\ 2\pi f_0 z), \tag{9}$$

v němž jsme zavedli pomocnou funkci c vztahem

$$c(z) \equiv \frac{1}{2}b(z)\cdot\exp[\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{gas}}(z)]. \tag{10}$$

Fourierova transformace intenzity (9) s uvážením vlastností (7) dává

$$G(f) = G_0(f) + C(f - f_0) + C^*(f + f_0). \tag{11}$$

Velkými písmeny zde označujeme Fourierovy obrazy příslušných funkcí, f je nezávisle proměnná.

Bude-li prostorová frekvence f_0 proužků podstatně větší než charakteristické frekvence obsažené ve spektrech funkcí g_0 a c, dojde ve spektru G intenzity k vzájemnému oddělení pásů G_0, C a C^* kolem frekvencí $0, f_0$ a $-f_0$ (obr.2). Inverzní Fourierova transformace aplikovaná pouze k pásu $C(f - f_0)$ rekonstruuje funkci c definovanou v (10). Hledaná fáze φ_{gas} je úhlem komplexní veličiny c, a tak

$$\mathrm{tg}\,\varphi_{\mathrm{gas}} = \frac{\mathrm{Im}\,c}{\mathrm{Re}\,c}. \tag{12}$$

V Matlabu je pro tento účel k dispozici funkce `angle`.

Jelikož fáze komplexního čísla je určena až na násobek 2π, objeví se ve funkci $\varphi_{\mathrm{gas}}(y,z)$ skoky o této velikosti. Je tedy ještě třeba tuto funkci vyhladit: nejdříve ve směru osy z (pro daný lineární segment), poté i ve směru y (pro různé segmenty).

Prostorové rozložení indexu lomu je fází plynu určeno jednoznačně v případě válcové (nebo obecněji eliptické) symetrie. Ztotožníme-li osu válcové symetrie s osou z, je pro tento případ $n = n(r,z)$, kde $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ .Vztah (3) pak představuje integrální Abelovu rovnici

$$u(y) = 2\cdot\int_{|y|}^{R} U(r)\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2 - y^2}}, \tag{13}$$

v níž

$$u(y) \equiv \varphi_{\mathrm{gas}}(y), \quad U(r) \equiv \frac{2\pi}{\lambda}\cdot[\,n(r) - n_0\,]. \tag{14}$$

Parametr z, který je během integrace konstantní, jsme pro větší přehlednost nevypisovali. Jde o integrální rovnici, jejíž řešení je dáno inverzní Abelovou transformací [5]

$$U(r) = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_r^R \frac{u'(y)\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - r^2}} \,. \tag{15}$$

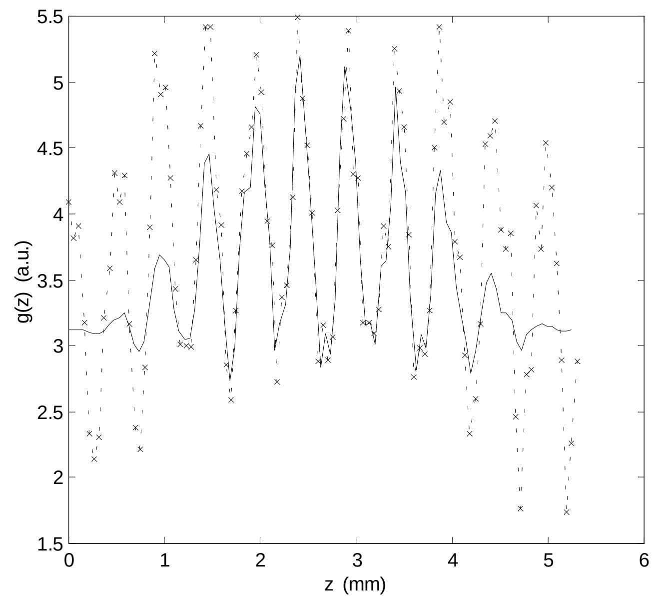
Výpočet integrálu v (15) představuje samostatný numerický problém. Ten spočívá především ve stanovení derivace funkce u, která navíc bývá zatížena šumem. Svou roli též hraje slabá singularita integrandu.

3) Numerické řešení v prostředí Matlabu

V prostředí Matlabu jsme odladili několik programů modelujících a numericky zpracovávajících interferogramy.

Program `test1D` testuje Takedovu metodu výpočtu fáze na předem definované intenzitě $g(z)$, překryté normálním nebo stejnoměrným šumem. Program nejdříve vyhladí data aproximačním splajnem (funkce `spap2` z toolboxu Splines). Podmínky periodičnosti jsou zajišťovány buď klasickým vynásobením intenzity hanning funkcí (viz obr.1) nebo přímo aproximačním splajnem s nulovými hodnotami na okrajích (tj. s multiplicitou krajních bodů rovnou jedné [6]).Na takto upravenou funkci je aplikována diskrétní Fourierova transformace (`fft`) s frekvencemi symetricky rozloženými kolem nuly (`fftshift`). Ze spektra $G(f)$ je poté interaktivně, pomocí myši, vyděleno pásmo $C(f - f_0)$. Prostorová frekvence f_0 lineární části fáze je určována interpolací jako poloha maxima funkce $|C|$. K interpolaci je využit kubický splajn, jak jej poskytuje standardní matlabovská funkce `spline`. Z fourierovského obrazu $C(f)$ je inverzní Fourierovou transformací (`ifft`) rekonstruována funkce $c(z)$, z níž je určena hledaná fáze φ_{gas}. Program je zakončen spojitým navazováním fáze v bodech, v nichž má skok 2π.

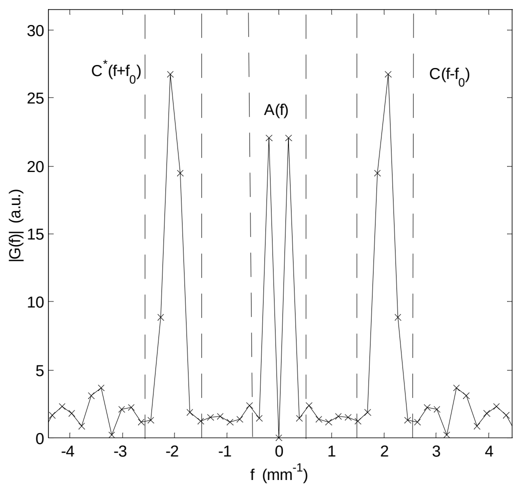
Průběh výpočtu zachycují obrázky 1 – 3. Na obr.1 je modelový profil intenzity,



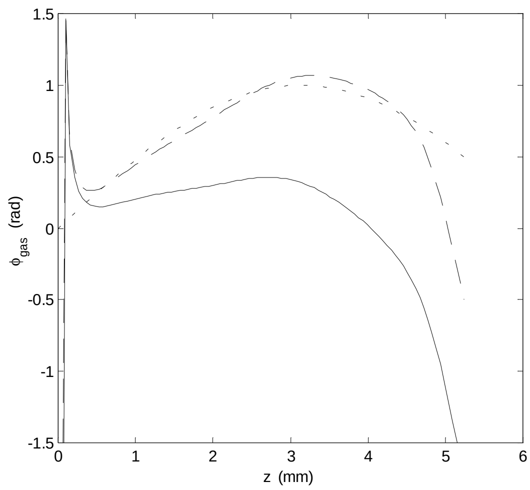
Obr.1 Testovaná intenzita, překrytá 10ti procentním normálním šumem; modelová data (…), data modifikovaná hanning funkcí a vyhlazená splajnem (–).

překryté desetiprocentním normálním šumem. Intenzita byla v tomto případě upravena hanning funkcí (8) (pro účely grafu vynásobené ještě faktorem ½), a vyhlazená splajnem.

Míra vyhlazení je dána vzdáleností jeho uzlů. Spektrum s třemi charakteristickými pásy vidíme na obr.2, porovnání vypočtené a předdefinované fáze je na obr.3.



Obr.2. Charakteristické spektrum intenzity z obr.1 (hodnota pro nulovou frekvenci je potlačena); frekvence proužků $f_0 = 2$ mm^{-1}.



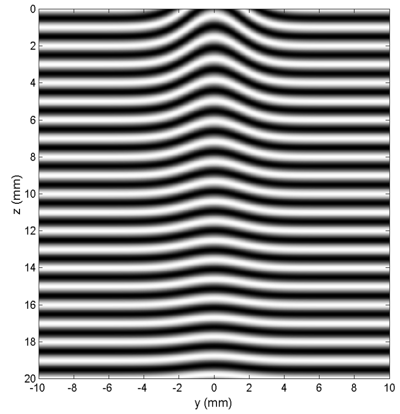
Obr.3 Porovnání vypočtené a exaktně zadané fáze v 1-dim. případě; výpočet s aproximovanou hodnotou $f_0 \approx 2{,}04$ mm^{-1} (–), výpočet s exaktní hodnotou $f_0 = 2$ mm^{-1} (--), exaktní řešení (…).

Jak je z posledního obrázku zřejmé, Takedova metoda vede k chybám především při okrajích lineárního segmentu. To je způsobeno jednak okrajovými efekty Fourierovy transformace, jednak citlivostí k chybě Δf v určení lineární frekvence f_0. Tato frekvence byla v tomto případě získávána interpolací z diskrétní posloupnosti frekvencí f_k, ekvidistantně rozložených s krokem 1/*L*. Pro poněkud pesimistický odhad chyby $\Delta f \approx 1/(5L)$ a pro $z \approx L$ vychází tato chyba řádově $\Delta\varphi_{\text{gas}} \approx 2\pi \Delta f\, z \approx 1$ v souladu s průběhem, vyznačeným plnou čarou. Čárkovaně je znázorněna fáze počítaná opět Takedovou metodou, tentokrát ale s přesnou hodnotou f_0.

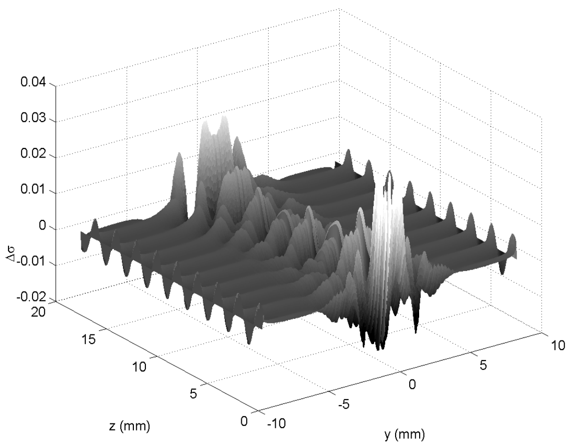
Programem `interfer` modelujeme interferogram pro předem dané rozložení hustoty nebo teploty a tlaku. Přesná hodnota funkce $\sigma(x,y,z) = \rho(x,y,z)/\rho_0$ a jí odpovídající fáze $\varphi_{\text{gas}}(x,y,z)$ jsou pro účely dalšího testování uloženy v položce 'UserData' modelového interferogramu (objekt typu image). V programu lze libovolně definovat relativní hustotu σ, frekvenci a směr proužků a rovněž funkce a, b intenzity (1). Ukázku modelového interferogramu pro válcově symetrické rozdělení veličiny σ obecného tvaru

$$\sigma(x,y,z) = 1 + A(z)\cdot \exp[-B(z) r^2], \tag{16}$$

kde r je vzdálenost od osy z a $A(z)$, $B(z)$ jsou polynomiální funkce, vidíme na obr.4.



Obr.4 Interferogram modelovaný pro předem definované rozložení hustoty.



Obr.5 Srovnání vypočteného a exaktního rozložení hustoty $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_{\mathrm{exact}}$ pro modelový interferogram z obr.4.

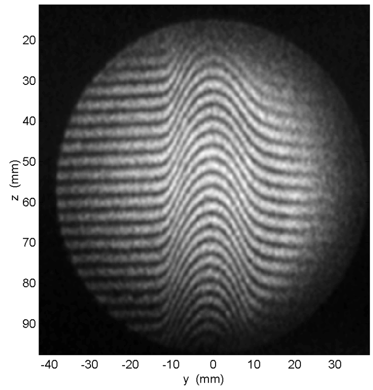
Poslední program `faze2D` rekonstruuje fázi a hustotu z dvoudimenzionálního interferogramu, ať již modelového či skutečného. Pokud program po ukončení výpočtu těchto veličin nalezne v položce ‘UserData‘jejich exaktní hodnoty, provede ještě ve formě několika grafů porovnání vypočtených a zadaných hodnot.

Abychom se vyhnuli již zmiňované chybě v určení frekvence proužků, stanovujeme ji z okrajů obrazce, kde zpravidla proužky nejsou deformovány a fáze je lineární. Z interferogramu je nejdříve myší vybrán vhodný segment s nedeformovanými proužky. Metodou nejmenších čtverců je jemu odpovídající fáze φ aproximována lineární funkcí φ_{lin} a poté je zobrazen rozdíl $\varphi_{\mathrm{gas}} \equiv \varphi - \varphi_{\mathrm{lin}}$. Odpovídající hodnotu f_0 je možné (pro $\varphi_{\mathrm{gas}} \approx 0$) buď akceptovat, nebo odmítnout. Tato procedura může být několikrát opakována, přičemž výsledná frekvence je určena jako aritmetický průměr akceptovaných hodnot. Určení prostorové frekvence f_0 tímto způsobem je o řád přesnější než by dala interpolace na maximum $|C(f - f_0)|$.

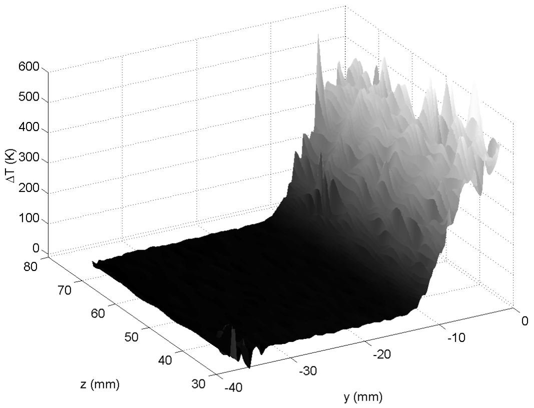
Abelova transformace (15) je numericky realizována pomocí dvou funkcí toolboxu Splines. Nejdříve je funkcí $\varphi_{\mathrm{gas}}(y)$ metodou nejmenších čtverců proložen aproximující splajn $s(y)$ (`spap2`). V numerických testech jsme tentokrát dali přednost splajnu kvadratickému před splajnem kubickým – jeho první derivace je méně „rozkmitána“. Další výpočty jsou již exaktní. Nejdříve jsou funkcí `fnder` pro úseky $\langle y_{\mathrm{i}}, y_{\mathrm{i+1}} \rangle$ mezi uzly spočítány první derivace, jež jsou pro kvadratický splajn lineární: $s'(y) = k_{\mathrm{i}} y + q_{\mathrm{i}}$. Poté je vyjádřen integrál v (15):

$$\int_r^R \frac{\varphi'_{\mathrm{gas}}(y)}{\sqrt{y^2 - r^2}} \mathrm{d}y \approx \sum_{\mathrm{i}} \int_{y_{\mathrm{i}}}^{y_{\mathrm{i+1}}} \frac{k_{\mathrm{i}} y + q_{\mathrm{i}}}{\sqrt{y^2 - r^2}} \mathrm{d}y = \sum_{\mathrm{i}} \left[k_{\mathrm{i}} \sqrt{y^2 - r^2} + q_{\mathrm{i}} \log(y + \sqrt{y^2 - r^2}) \right]_{y_{\mathrm{i}}}^{y_{\mathrm{i+1}}} .$$

Obr. 4,5 zachycují modelový případ s exaktně daným řešením. Chyba v určení hustoty je relativně nízká, malé „rozvlnění“ je způsobeno konečným počtem členů Fourierovy řady (Gibbsův efekt). Obr. 6 ukazuje reálný interferogram plamene svíčky. Za předpokladu konstantního tlaku souvisí změna teploty ΔT v plameni s veličinou σ vztahem $\Delta T = (\frac{1}{\sigma} - 1) \cdot T_0$. I přes vyšší šum umožňuje metoda hrubý odhad zvýšení teploty v ose plamene cca 500 K, šířka plamene je asi 20 mm.



Obr.6 Reálný interferogram plamene svíčky.



Obr.7 Změna teplotního pole odpovídající interferogramu z obr.6. Souřadnice y, z souhlasí se souřadnicemi předchozího obrázku.

Závěr

V prostředí Matlabu byly odladěny programy, modelující a zpracovávající interferogramy nehomogenního plynného prostředí. Při tvorbě těchto programů byly uplatněny prostředky pro tvorbu interaktivní grafiky (ovládání myší, GUI). K výpočtu fáze byla úspěšně aplikována Takedova metoda, k výpočtu vnitřních poměrů v plynu pro případ válcové symetrie Abelova transformace. Zpracování modelových interferogramů s předem danými parametry umožňuje u reálných interferogramů analyzovat zdroje numerických chyb a odhadovat jejich velikost.

Práce byla podpořena výzkumným záměrem CEZ:J06/98:124100004.

Literatura

[1] R. Řezníček: Vizualizace proudění, Academia, Praha, 1978.
[2] F. Unterseher, J. Hansen, B. Schlesinger: Holography Handbook. Roos Books. Berkeley, California,1992.
[3] M. Liška, L. Kovář, O. Samek: Jemná mech. a opt., 1-2, 1994, s.9
[4] M. Takeda, H. Ina, S. Kobayashi: J. Opt. Soc. Am. 72 (1982), 1, s.156
[5] J. Hlína: in Acta Technica ČSAV, Praha, 1990, 4, s.422
[6] C. de Boor: A Practical Guide to Splines, Appl. Math. Sc. 27, Springer Verlag, New York, 1978